Colle du 12 mars: Groupes, anneaux, corps

19.1 Première série

Exercice 1: Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{F}_{p^2}$ le corps à p^2 éléments. On considère l'application: $N : \mathbb{F}_{p^2} \to \mathbb{F}_{p^2}, x \mapsto x^{p+1}$. Quelle est l'image de N?

Exercice 2: Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Pour quelles valeurs de k existe-t'il un sous-groupe de $GL_k(\mathbb{C})$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m$?

Exercice 3: Montrer que la suite $a, a^a, a^{a^a}, ...$ devient constante modulo n à partir d'un certain rang.

Exercice 4: *(Théorème des quatre carrés)*
1. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe a et b dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $1 + a^2 + b^2 = 0$.
2. *(Théorème de Minkowski)* Soit n un entier naturel non nul. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ convexe et symétrique par rapport à l'origine. On suppose que le volume de A est supérieur strictement à 2^n. Montrer que A contient un point à coordonnées entières.
3. Montrer que tout entier naturel s'écrit comme somme de quatre carrés parfaits.

19.2 Deuxième série

Exercice 1: Soit G un groupe fini d'ordre $n > 1$. Montrer que $|\text{Aut}G| \leq n^{\log_2 n}$.

Exercice 2: Notons $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Soit p un nombre premier. Montrer que p divise $2F_p - F_{p-1} - 1$.

Exercice 3: *(Corps valués)*
Soit K un corps. On dit que $|\cdot| : K \to \mathbb{R}^+$ est une valeur absolue si, pour tout $x \in K$, $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$, et pour tous $x, y \in K$, $|xy| = |x||y|$ et $|x + y| \leq |x| + |y|$. On dit que $|\cdot|$ est ultramétrique si pour tous $x, y \in K$, $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.
1. Montrer que $|\cdot|$ est ultramétrique si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n \cdot 1| \leq 1$.
2. Quelles sont les valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est la somme des carrés de trois rationnels. Montrer que n est la somme des carrés de trois entiers.

19.3 Troisième série

Exercice 1: Soient x, y et n trois entiers naturels non nuls tels que $\frac{xy}{x+y} > n$. Montrer que $\frac{xy}{x+y} \geq n + \frac{1}{n^2+2n+2}$.

Exercice 2: *(Théorème de Chevalley-Warning)*
1. Soit $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Soit $P \in \mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n]$ un polynôme homogène de degré d tel que $0 < d < n$. On considère $S = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \left(1 - P(x)^{q-1}\right)$. En étudiant S, montrer que P admet un zéro dans $(\mathbb{F}_q)^n$ distinct de $(0, ..., 0)$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{F}_q[X_1, .., X_n]$ homogène de degré n dont le seul zéro est $(0, ..., 0)$. On admettra qu'il existe un corps fini à q^n éléments.

Exercice 3: *(Théorème des quatre carrés)*
On définit l'algèbre des quaternions de Hurwitz $\mathbb{H}$ de la manière suivante: $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $1, i, j, k$, et la multiplication est définie par $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k$. On appelle norme l'application $N : \mathbb{H} \to \mathbb{Q}, a + bi + cj + dk \mapsto a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
1. Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{H}$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
2. Soit $A = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k + \mathbb{Z}\frac{1+i+j+k}{2}$. Montrer que tout idéal de A est principal.
3. Montrer que, si p est un premier impair, alors il existe x, y entiers tels que $p | x^2 + y^2 + 1$.
4. Montrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés parfaits.